Bobines «anti-Helmholtz».

Question 1 :

Un dipôle magnétique de moment dipolaire $\overrightarrow{m}$ est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Rappeler, sans démonstration, la valeur du moment dynamique exercé par le champ sur le dipôle et montrer qu'il a tendance à aligner le dipôle sur le champ. Rappeler, sans démontration, l'énergie d'interaction champ-dipôle et en déduire que la force exercée par le champ sur le dipôle* aligné *est proportionnelle au gradient du module du champ.

Le moment dynamique exercé par le champ sur le dipôle est $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$ qui est un vecteur orthogonal au plan contenant $\overrightarrow{m}$ et $\overrightarrow{B}$ et dont le sens correspond par la règle du tire-bouchon à un sens de rotation dans le plan allant de $\overrightarrow{m}$ vers $\overrightarrow{B}$. Comme le théorème du moment cinétique est

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Gamma}$$

le dipôle amorce une rotation dans le sens associé à $\overrightarrow{\Gamma}$ donc vers $\overrightarrow{B}$.

L'énergie du dipôle dans le champ est $\mathcal{E} = -\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{B}$ donc s'il est aligné

$$\mathcal{E} = -\|\overrightarrow{m}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\| = -m\,B$$

à laquelle correspond, comme à toute énergie potentielle, une force qui, compte tenu que la norme du moment magnétique est une donnée expérimentale constante, est

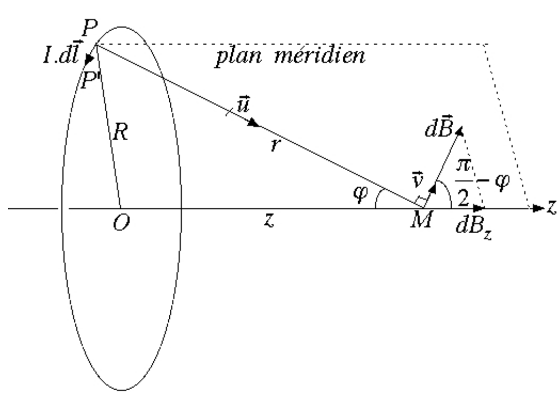
$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,m\,B = m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,B$$

qui est orientée dans le sens du gradient de B, norme du champ magnétique, donc dans le sens où cette norme croît, donc vers les zones où le champ est intense.

Question 2 :

Afin de vérifier expérimentalement ce résultat, on se propose de concevoir un dispositif créant un champ avec une norme de gradient quasiment uniforme. Montrer qu'une spire circulaire de courant de centre O, d'axe Oz (de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$), de rayon R, parcouru par un courant I crée sur son axe, en un point M tel que $OM = z\,\overrightarrow{e_z}$ un champ $\overrightarrow{B} = f(z)\,\overrightarrow{e_z}$ où $f(z)$ est une fonction à déterminer.

La symétrie de révolution entraîne que le champ est colinéaire à Oz (sur l'axe Oz uniquement, bien sûr). Par contre, bien que Oz soit donc une ligne de courant, le module du champ y varie avec z et le théorème d'Ampère ne nous sera d'aucun secours ; il faut utiliser la formule de Biot et Savart.



Considérons donc un élément de courant $I\,\overrightarrow{PP'} = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_\theta}$ sur la spire, il crée en M, en notant $\overrightarrow{u}$ et r le vecteur unitaire et le module de $\overrightarrow{PM}$, un champ élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

$\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{u}$ sont unitaires et orthogonaux, leur produit vectoriel est donc un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ dans le plan défini par Oz et P, notons-le $\overrightarrow{v}$. On a donc :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \frac{I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{v}}{r^2}$$

$\mathrm{d}\overrightarrow{B}$ se compose d'une composante sur l'axe $\mathrm{d}B_z\,\overrightarrow{e}_z$ et d'une composante orthogonale à Oz. L'intégration de cette seconde composante donnera un résultat nul, car on sait que le champ total est porté par Oz ; seule nous intéresse donc $\mathrm{d}B_z$. Notons φ l'angle OPM. Par projection, on a :

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \frac{I\,\mathrm{d}l\,\cos(\pi/2-\varphi)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \frac{I\,\mathrm{d}l\,\sin\varphi}{r^2}$$

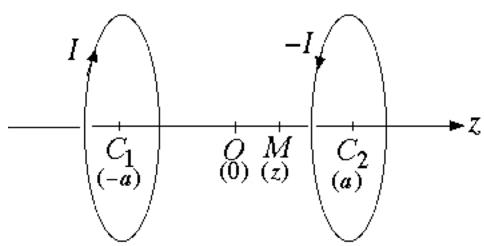
et

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int \frac{I\,\mathrm{d}l\,\sin\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \frac{I\,\sin\varphi}{r^2} \int \mathrm{d}l = \frac{\mu_0}{2} \frac{I\,\sin\varphi}{r^2}\,R$$

Reste à reporter $\sin\varphi = R/r$ et $r = \sqrt{R^2+z^2}$, alors

$$f(z) = \frac{\mu_0\,I\,R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Question 3 :
On place deux spires coaxiales (axe Oz), de centres C1 et C2 symétriques par rapport à O distants de 2a, de même rayon R, parcourues par la même intensité I, mais dans des sens contraires (voir figure ci-dessous). Exprimer le champ en un point M de l'axe (avec $OM = z\,\overrightarrow{e_z}$) en faisant intervenir la fonction f sans en reporter l'expression. Effectuer un développement limité à l'ordre quatre en z et en déduire que le gradient du champ est «le plus constant possible» si la dérivée troisième de f s'annule en a, soit $f^{(3)}(a) = 0$. Des calculs sans difficulté conduisent à $a = R\,\frac{\sqrt{3}}{2}$



Compte tenu de la position des centres et aussi de la parité de $f(z)$, le champ créé par les deux spires est :

$$B_{total}(z) = g(z) = f(z+a) - f(z-a) = f(a+z) - f(a-z)$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 4 autour de a :

$$f(a+z) = f(a) + z\,f'(a) + \frac{z^2}{2}\,f''(a) + \frac{z^3}{6}\,f^{(3)}(a) + \frac{z^4}{24}\,f^{(4)}(a) + o(z^4)$$

$$B(a-z) = f(a) - z\,f'(a) + \frac{z^2}{2}\,f''(a) - \frac{z^3}{6}\,f^{(3)}(a) + \frac{z^4}{24}\,f^{(4)}(a) + o(z^4)$$

$$B_{total}(z) = 2\,z\,f'(a) + \frac{z^3}{3}\,f^{(3)}(a) + o(z^4)$$

Si l'on choisit a de sorte que $f^{(3)}(a) = 0$, alors :

$$B_{total}(z) = g(z) = 2\,z\,f'(a) + o(z^4)$$

$$\frac{\mathrm{d}B_{total}(z)}{\mathrm{d}z} = 2\,f'(a) + o(z^3)$$

Autrement dit, on peut considérer que sur l'axe le gradient du champ magnétique est quasiment uniforme.

Un calcul de routine qu'on fait faire par Maple conduit à :

$$f^{(3)}(z) = -\frac{15\,\mu_0\,I\,R^2\,z\,(4\,z^2 - 3\,R^2)}{(R^2+z^2)^{9/2}}$$

$$f^{(3)}(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = R\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Question 4 :
On se déplace en dehors de l'axe à une distance r de celui-ci. Par des raisonnements de symétrie, montrer que sur les composantes axiale, radiale et orthoradiale du champ, l'une est nulle, l'autre fonction paire de r et la dernière fonction impaire. En utilisant la propriété qu'a le flux magnétique à travers une surface fermée judicieusement choisie, montrer que l'on peut calculer la composante radiale du champ à partir de la fonction f et la calculer dans le cadre du développement limité précédent.

Considérons un point M non plus sur l'axe mais près de l'axe, repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z avec $r \ll R$. Le plan méridien contenant Oz et M est un plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est contenu dans ce plan ; il a une composante axiale B_z et une composante radiale B_r qui ne dépendent que de r et z puisqu'il y a invariance par rotation. Considérons deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe ; on peut considérer qu'ils ont même z et des valeurs de r opposées. On passe de l'un à l'autre par une rotation de 180° qui conserve la composante axiale et retourne la composante radiale ; B_z est donc fonction paire de r et B_r fonction impaire de r. Si r est assez petit, on peut remplacer $B_z(z,r)$ et $B_r(z,r)$ par leur développement de Taylor à l'ordre 1 en r, soit :

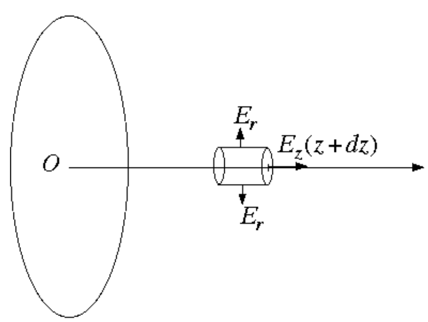
$$B_z(z,r) = B_z(z,0)$$

$$B_r(z,r) = r\,\frac{\partial B_r}{\partial r}(z,0)$$

$B_z(z,0)$ est le champ sur l'axe calculé plus haut ; on a donc :

$$B_z(z,r) = B_z(z,0) = g(z)$$

Le développement de $B_r(z,r)$ montre que B_r est proportionnel à r mais ne nous permet pas d'en calculer la valeur puisque nous ne connaissons pas $\frac{\partial B_r}{\partial r}(z,0)$.



On va utiliser ici le fait que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. On choisit un cylindre d'axe Oz entre les cotes z et $z+\mathrm{d}z$ fermé par deux disques. Le flux à travers le disque de cote $z+\mathrm{d}z$ et de vecteur surface parallèle à Oz de même sens est :

$$\Phi_1 = \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint B_z(z+\mathrm{d}z,r)\,\mathrm{d}S = \iint g(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}S = g(z+\mathrm{d}z)\iint \mathrm{d}S = \pi\,r^2\,g(z+\mathrm{d}z)$$

De même le flux à travers le disque de cote z est, en notant le changement d'orientation :

$$\Phi_2 = -\pi\, r^2\, g(z)$$

Enfin, le flux à travers le cylindre, dont les vecteurs surfaces élémentaires sont radiaux et en prenant $\mathrm{d}z$ suffisamment petit pour négliger la variation de B_r avec z, est :

$$\Phi_3 = \iint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint B_r(z,r)\,\mathrm{d}S = B_r(z,r) \iint \mathrm{d}S = 2\,\pi\, r\, \mathrm{d}z\, B_r(z,r)$$

Le flux total est nul et l'on arrive donc, avec un développement de Taylor à :

$$0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \pi\, r^2\, (g(z+\mathrm{d}z) - g(z)) + 2\,\pi\, r\, \mathrm{d}z\, B_r(z,r) = \pi\, r^2\, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + 2\,\pi\, r\, \mathrm{d}z\, B_r(z,r)$$

On en déduit :

$$B_r(z,r) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}$$

Le calcul de cette dérivée n'apporte ici que des calculs sans grand intérêt. Nous nous autorisons à faire l'impasse.

Remarque finale : Attention, cet exercice un peu artificiel cache des questions de cours à peine modifiées. Ne pas savoir les résoudre serait courir au devant de graves désagréments.